Triangle équilatéraux inscrits sur une hyperbole

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien rapport à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, k désigne un réel strictement positif. On note (x,y) le couple de coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$.

Soit (γ) l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $xy=k$.

1. On considère trois points A,B,C de (γ), deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées a,b,c respectivement.

1.a Déterminer les coordonnées (α,β) du centre de gravité de G du triangle ABC.

1.b Déterminer les coordonnées (λ,μ) de l'orthocentre H du triangle ABC.
Vérifier que H appartient à (γ).

2. On suppose, dans cette question, que ABC est un triangle équilatéral.

2.a Que peut-on dire de G et H ?

2.b Montrer que a,b,c sont les racines du polynôme $P(X)$ avec $P(X)=X^3-3\lambda X^2-3\dfrac{k^2}{\lambda^2}X+\dfrac{k^2}{\lambda}$.

2.c On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation $y=x$.
On suppose que H n'est pas l'un des sommets de (γ).
Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC avec (γ) contient un point D distincts de A,B,C. Préciser les coordonnées de D.

3. Soit r un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par : $Q(X)=X^3-3rX^2-3\dfrac{k^2}{r^2}X+\dfrac{k^2}{r}$.

3.a Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1,r_2,r_3.

3.b Soit R_1,R_2,R_3 les points de (γ) d'abscisses respectives r_1,r_2,r_3.
Démontrer que le triangle $R_1R_2R_3$ est équilatéral.

4. Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ).